

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse Übungsblatt 2

Daniel Muschick, Matr. Nr. 0130341

17. November 2003

Abgabe: Spätestens Di, 18. 11. 9:00 Uhr

1 Kartenspiel

Es soll eruiert werden, ob zwei bestimmte Ereignisse voneinander unabhängig sind oder nicht. Mathematisch geschieht dies, indem man zeigt, dass

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

- (a) Die Karte soll rot sein und ein Ass. Dies trifft nur auf zwei Karten zu, also

$$P(A \cap B) = P(\text{rotes Ass}) = \frac{2}{52} \approx 0,038$$

Offensichtlich sind die Ereignisse völlig unabhängig voneinander, es gilt

$$P(A) * P(B) = \frac{4}{52} * \frac{1}{2} \approx 0,038 = P(A \cap B), \quad Q.E.D.$$

- (b) Die gezogene Karte sei ein Ass und ein Karo-Ass. Da die zweite Bedingung die erste impliziert, können die Ereignisse *nicht* unabhängig sein. Es zeigt sich

$$P(A \cap C) = \frac{1}{52} \approx 0,019 \neq P(A) * P(C) = \frac{4}{52} * \frac{1}{52} \approx 0,0015$$

- (c) Die gewählte Karte sei rot und ein Karo-Ass. Wiederum beinhaltet die zweite Bedingung die erste, die Ereignisse können *nicht* unabhängig sein.

$$P(B \cap C) = \frac{1}{52} \approx 0,019 \neq P(B) * P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{52} \approx 0,0096$$

- (d) Gewählt soll eine rote Karte werden, deren Zahlenwert 10 ist. Diese Ereignisse sind voneinander unabhängig, man sieht

$$P(B \cap D) = \frac{2}{52} = P(B) * P(D) = \frac{1}{2} * \frac{4}{52}$$

- (e) Der Fall soll eintreten, dass die gezogene Karte sowohl ein Karo-Ass als auch ein Zehner sei. Dies ist völlig unmöglich, man sieht auch

$$P(C \cap D) = 0 \neq P(C) * P(D) = \frac{1}{52} * \frac{4}{52}$$

2 Hash - Tables

Siehe abgegebene Dateien

3 Paddler

- (a) Das Risiko, zu ertrinken, beläuft sich auf

$$P(Ertrinken) = 0,1 * 0,2 * 0,4 = 0,008$$

- (b) Der gekenterte Paddler kann sich mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P(Retten|Kentern) = 0,8 + 0,2 * 0,6 = 0,92$$

retten.

- (c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein überlebender Paddler eine Kenterung hinter sich hat, beträgt

$$\begin{aligned} P(\text{Kenterung}|\text{Überleben}) &= \frac{P(\text{Überleben}|\text{Kenterung}) * P(\text{Kenterung})}{P(\text{Überleben})} = \\ &= \frac{0,92 * 0,1}{0,9 + 0,1 * 0,8 + 0,1 * 0,2 * 0,6} \approx 0,0927 \end{aligned}$$

4 Wahrscheinlichkeitsfunktionen

- (a) Damit die gegebenen Funktionen Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf den positiven ganzen Zahlen definieren, muss gelten, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

i.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \frac{2^k}{k!} = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) = c(e^2 - 1) \stackrel{!}{=} 1$$

$$c = \frac{1}{e^2 - 1}$$

ii.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^k} = c \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = c * \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1 \right) = c * \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \stackrel{!}{=} 1$$

$$c = 1$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k 2^k} = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} = c * \ln 2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$c = \frac{1}{\ln 2}$$

iv.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^2} = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = c \frac{\pi^2}{6} \stackrel{!}{=} 1$$

$$c = \frac{6}{\pi^2}$$

(b) i.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} s^k = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2s)^k}{k!} = c e^{2s} = \frac{e^{2s}}{e^2 - 1}$$

ii.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{s}{2}} = \frac{2}{2 - s}$$

iii.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1) 2^{k+1} \ln 2} s^k$$

iv.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{\pi (k+1)^2} s^k$$

(c) i.

$$G'_X(s) = \left(\frac{e^{2s}}{e^2 - 1} \right)' = 2 \frac{e^{2s}}{e^2 - 1}$$

$$G'_X(1) = E(X) = \frac{2e^2}{e^2 - 1} \approx 2,313$$

ii.

$$G'_X(s) = \left(\frac{2}{2-s} \right)' = \frac{2}{(2-s)^2}$$

$$G'_X(1) = E(X) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$$

iii.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{\ln 2}$$

iv.

$$E(X) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Diese Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt keinen Erwartungswert.

5 Zufallsvariable

(a) Da die Verteilungsfunktion stetig ist, muss gelten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} F_X(X) &= \lim_{x \rightarrow k^+} F_X(X) \\ k - \frac{2}{3} &= 1 \\ k &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(b) Siehe Anhang

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < k \\ 0 & x \geq k \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x x^2 dx + \int_1^{\frac{5}{3}} x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{41}{36} \\ E(X^2) &= \int_0^1 x^4 dx + \int_1^{\frac{5}{3}} x^2 dx = \frac{1}{5} + \frac{\frac{5}{3}^3}{3} - \frac{1}{3} \approx 1,41 \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 1,41 - \left(\frac{41}{36} \right)^2 \approx 0,1128 \end{aligned}$$

(e)

$$P_X\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = F_X(1) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \approx 0,2917$$

6 Bauteillieferung

Da die Lieferung umfangreich ist, kann mit der Binomialverteilung gerechnet werden. Es sei dann

$$P_X(X = k) = \binom{20}{k} p^k q^{n-k}, \quad p = 0,08, \quad q = 0,92$$

die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 20 Stichproben k fehlerhaft sind.

- (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zweite Stichprobe entnommen werden muss, entspricht der, dass genau 1 fehlerhaftes Teil in der Stichprobe auftritt.

$$P(\text{Zweite Stichprobe}) = P_X(1) = \binom{20}{1} p q^{19} \approx 0,328$$

- (b) Die Lieferung wird entweder angenommen, wenn auf Anhieb kein einziges Teil fehlerhaft ist, oder wenn bei der zweiten Stichprobe kein fehlerhaftes mehr aufscheint.

$$P(\text{Annahme}) = P_X(0) + P_X(1) * P_X(0) = q^{20} + 20pq^{19} * q^{20} \approx 0,25$$

- (c) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Annahme zwei Stichproben geprüft wurden, ermittelt man mit dem Satz von Bayes:

$$\begin{aligned} P(2 \text{ Stichproben} | \text{Annahme}) &= \frac{P(\text{Annahme} | 2 \text{ Stichproben}) * P(2 \text{ Stichproben})}{P(\text{Annahme})} = \\ &= \frac{q^{20} * 20pq^{19}}{q^{20} + 20pq^{19} * q^{20}} \approx 0,247 \end{aligned}$$

- (d) Es werden

- Bei einem fehlerhaften 40 Stück geprüft
- Ansonsten 20 Stück überprüft (wenn man davon ausgeht, dass wirklich alle Bauteile aus der Stichprobe untersucht werden)

Aufgeschlüsselt nach den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ergibt das

$$\mu = 20(1 - 20pq^{19}) + 40 * 20pq^{19} \approx 27$$

7 BANACHSCHES Zündholzproblem

Das erste Mal entdeckt er eine leere Schachtel frühestens beim $n+1$ -ten Griff, wenn er immer aus der gleichen Schachtel Zündhölzer geholt hat, aus der anderen also keines.

Sei $Q_X(X = k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass er beim ersten Auffinden einer leeren Schachtel k Zündhölzer aus der noch nicht leeren Schachtel genommen hat, dann gilt

$$Q_X(0) = \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} q^{n+1} = p^{n+1} + q^{n+1}$$

Fehlte in der anderen Schachtel nur ein Zündholz, griff Banach n mal in die erste Schachtel, nur ein Mal in die andere und danach ein letztes Mal in die erste.

$$Q_X(1) = \binom{n+1}{n} p^n q p + \binom{n+1}{n} q^n p q = (n+1) p^{n+1} q + (n+1) q^{n+1} p$$

Dasselbe Spiel für 2 fehlende in der zweiten Schachtel: Er muss $n+2$ mal gezogen haben (n mal aus der einen, 2 mal aus der anderen), danach noch einmal aus der dann leeren:

$$Q_X(2) = \binom{n+2}{n} p^n q^2 p + \binom{n+2}{n} q^n p^2 q = \binom{n+2}{n} p^{n+1} q^2 + \binom{n+2}{n} q^{n+1} p^2$$

Man sieht

$$Q_X(k) = \binom{n+k}{n} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k)$$

(a) Für P_k gilt $P_k = Q_X(n-k)$, also

$$P_k = \binom{2n-k}{n} (p^{n+1} q^{n-k} + q^{n+1} p^{n-k})$$

(b)

$$P_k = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

Der Binomialkoeffizient erreicht bei $k = 0$ sein Maximum, er übertrifft damit das Tief des zweiten Faktors. Auch erscheint es logisch, dass, bei gleichen Wahrscheinlichkeiten, in der anderen Schachtel am Ende ebenfalls kein Zündholz mehr vorhanden ist.

8 Lebensdauer eines Systems

Im Folgenden werde ich die Bereiche für $t < 0$ außer acht lassen, da sie nicht relevant sind ($a(t < 0) = 0$).

(a) Exponentialverteilte Zufallsvariable, $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ f_T(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \\ a(t) &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} = \lambda \end{aligned}$$

(b) Weibull-verteilte Zufallsvariable, $\lambda, s > 0$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\lambda t^s} \\ f_T(t) &= \lambda s t^{s-1} e^{-\lambda t^s} \\ a(t) &= \frac{\lambda s t^{s-1} e^{-\lambda t^s}}{e^{-\lambda t^s}} = \lambda s t^{s-1} \end{aligned}$$

(c) Hjorth-verteilte Zufallsvariable, $\lambda, q, r > 0$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \frac{e^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}}} \\ f_T(t) &= \frac{rte^{-\frac{rt^2}{2}} * (1+qt)^{\frac{\lambda}{q}} + \lambda(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}-1} e^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{2\lambda}{q}}} = \\ &= \frac{rte^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}}} + \frac{\lambda e^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}+1}} \\ a(t) &= \frac{\frac{rte^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}}} + \frac{\lambda e^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}+1}}}{\frac{e^{-\frac{rt^2}{2}}}{(1+qt)^{\frac{\lambda}{q}}}} = rt + \frac{\lambda}{1+qt} \end{aligned}$$